A Planck-idő és a Planck-távolság meghatározása

A modern fizika szerint a tér és az idő (pontosabban szólva a téridő) meghatározott méretű egységekből, kvantumokból* áll. A fény kvantumához, a fotonhoz hasonlóan a téridő kvantumai tovább már nem oszthatóak. Ezeknél kisebb távolságokról vagy időtartamokról nincs értelme beszélni. A téridő kvantumainak méretét Planck-távolságnak, illetve Planck-időnek nevezzük.

A Planck-távolság és a Planck-idő értékét a dimenzióanalízis segítségével könnyen megbecsülhetjük. A dimenzió itt nem a tér egymástól független irányaira utal, hanem a fizikai mennyiségek mértékegységeit jelenti.

A modern fizika három alapvető építőköve a speciális és általános relativitáselmélet, továbbá a részecskefizika (kvantumelmélet). A speciális relativitáselmélet legfontosabb mennyisége a fénysebesség (c), az általános relativitáselmélet a gravitáció elmélete, amely a Newton-féle gravitációs állandót (f) használja fel, a részecskefizika legtöbb egyenletében pedig a Planck-állandó (h) szerepel. A téridő kvantumos szerkezetére vonatkozó elképzelés erre a három elméletre épül, így feltételezhetjük, hogy a kvantumok méretét a c, az f és a h értéke határozza meg.

Mennyiség	Jelölés	Számérték	Mértékegység (dimenzió)	Mértékegység az SI alapmennyiségeivel
hossz	l	1	m	m
idő	t	1	s	s
tömeg	m	1	kg	kg
fénysebesség	c	$3 \cdot 10^{8}$	m/s	m/s
gravitációs állandó	f	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$	$\mathrm{Nm^2/kg^2}$	$\mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)}$
Planck-állandó	h	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$	Js	$\mathrm{kg \cdot m^2/s}$

A felhasznált mennyiségek, számértékek és mértékegységek

A táblázatban szereplő gravitációs állandó SI mértékegységét például a következőképpen kapjuk meg. Az erő mértékegysége a newton (N), ami az $F = m \cdot a$ egyenlet alapján $\mathrm{kg \cdot m/s^2}$-tel egyenlő. Így:

$$N \cdot \frac{m^2}{kg^2} = kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot \frac{m^2}{kg^2} = \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \tag{1}$$

A Planck-állandó SI egysége hasonló módon fejezhető ki, felhasználva, hogy az energia joule (J) mértékegysége Nm-rel egyezik meg (erő·út).

A természet törvényeit leíró fizikai egyenletekben általában a mennyiségek szorzata szerepel. Az egyes mennyiségek pedig különböző hatványokon fordulhatnak elő a képletekben. A reciprok vagy a négyzetgyök is felírható hatványalakban, például:

$$a = a^1, \qquad \frac{1}{a} = a^{-1}, \qquad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

Hogyan függ a Planck-idő (t_P) az alapvető természeti állandóktól? Az összefüggést leíró egyenlet egyik oldalán az idő, a másik oldalán pedig a c, az f és a h hatványainak a szorzata fordulhat elő. Az ismeretlen kitevőket jelöljük x, y, z-vel:

$$t_P = c^x \cdot f^y \cdot h^z \tag{2}$$

Az egyenletnek a mértékegységekre is teljesülnie kell:

$$s = \left(\frac{m}{s}\right)^x \cdot \left(\frac{m^3}{kg \cdot s^2}\right)^y \cdot \left(\frac{kg \cdot m^2}{s}\right)^z \tag{3}$$

A hatványozás azonosságai alapján:

$$s = \frac{m^x \cdot m^{3y} \cdot kg^z \cdot m^{2z}}{s^x \cdot kg^y \cdot s^{2y} \cdot s^z} = m^{x+3y+2z} \cdot kg^{z-y} \cdot s^{-x-2y-z} \tag{4}$$

* A *kvantum* szó latinul mennyiséget jelent.

Mivel a bal oldalon egyedül a másodperc szerepel, a jobb oldalon csak ez maradhat, a többi mértékegységnek ki kell esnie. A másodperc kitevője tehát 1, a többi mértékegységé pedig 0 (bármely szám 0. hatványa 1-gyel egyenlő: $a^0 = 1$). Azaz:

$$m: \qquad x + 3y + 2z = 0 \tag{5}$$

$$kg: \qquad z - y = 0 \tag{6}$$

$$s: \qquad -x - 2y - z = 1 \tag{7}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$x = -\frac{5}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{1}{2}$$

Így a Planck-időt meghatározó összefüggés:

$$t_P = c^x \cdot f^y \cdot h^z = c^{-\frac{5}{2}} \cdot f^{\frac{1}{2}} \cdot h^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{f \cdot h}{c^5}} \tag{8}$$

A mennyiségeket behelyettesítve, a Planck-idő:

$$t_P = 1{,}35 \cdot 10^{-43}\ s \tag{9}$$

A fizikai képletek különböző nagyságrendű szorzótényezőket is tartalmazhatnak. Az idő kvantuma tehát a fenti érték néhányszorosa, néhány tízszerese, vagy akár néhány milliószorosa is lehet, bár a szorzótényezők nagyságrendje ritkán ér el ilyen nagy értéket.

A 10^{-43} másodperc azonban olyan kicsi időtartam, hogy a szorzótényező valójában nem lényeges, nagyságrendileg megkaptuk a Planck-időt. Körülbelül ekkora időtartamon belül nincs értelme időről beszélni, az idő nem osztható fel kisebb részekre.

Előfordulhatna, hogy az (5)–(7) egyenletrendszernek nincsen egyértelmű megoldása. Ha egyáltalán nem találtunk volna megoldást, akkor újabb fizikai mennyiségeket kéne belevenni a (2) képletbe. Ha pedig valamelyik ismeretlen kiesett volna (azaz értéke tetszőleges lehet), akkor ettől a mennyiségtől nem függne a Planck-idő, kimaradna a képletből.

Javaslom az olvasónak, hogy a fentiekhez hasonló módon határozza meg a Planck-távolság (l_P) értékét. Ha jól számol, akkor az

$$l_P = \sqrt{\frac{f \cdot h}{c^3}} \tag{10}$$

összefüggést kapja, melynek alapján:

$$l_P = 4{,}05 \cdot 10^{-35}\ m \tag{11}$$

Mint látjuk, iszonyatosan kis távolságról van szó, ezért a szorzótényezővel itt sem foglalkozunk.*

Összeállította:
Juhász Tibor

* Bár az elektron nem tekinthető golyónak, mérete (szemléltetésként) 10^{-15} m nagyságrendű. A Planck-távolság ennél összehasonlíthatatlanul kisebb.