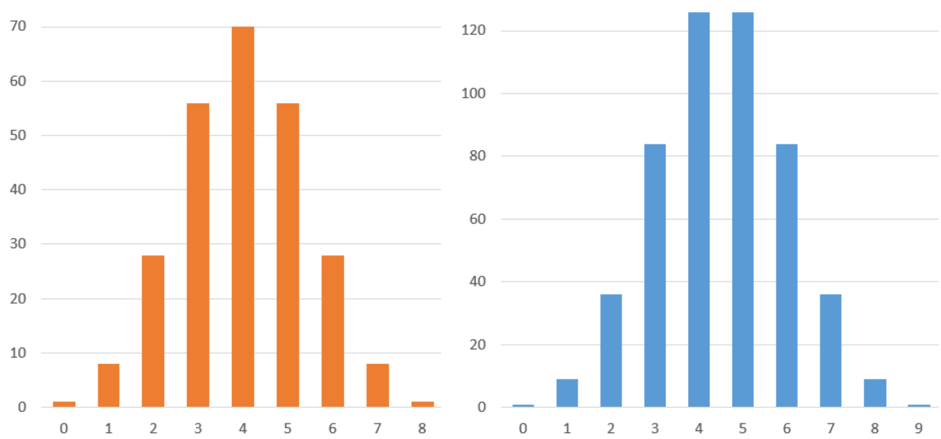
A binomiális együtthatók néhány tulajdonsága

Összeállította: Juhász Tibor

A továbbiakban az $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ kifejezést binomiális együtthatónak nevezzük ($1 \le n$, $0 \le k \le n$, egész számok). Az elnevezés eredetét lásd például a Wikipédiában.

A binomiális együtthatók értékeit $n = 8$-ra és $n = 9$-re szemlélteti az alábbi táblázat, illetve a diagramok.

k	$\binom{8}{k}$	$\binom{9}{k}$
0	1	1
1	8	9
2	28	36
3	56	84
4	70	126
5	56	126
6	28	84
7	8	36
8	1	9
9		1



A binomiális együtthatók értéke $n = 8$ és $n = 9$ esetén

Figyeljük meg, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, például $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$, vagy $\binom{9}{2} = \binom{9}{7}$ stb.

A binomiális együtthatók értéke $n = 8$ esetén $k = n/2 = 4$-ig nő, majd innen kezdve csökken. A maximumot $k = 4$-nél érik el. $n = 9$ esetén $(n–1)/2 = 4$-ig nőnek, $(n+1)/2 = 5$-től pedig csökkennek. 4-nél és 5-nél viszont megegyeznek egymással, és itt maximálisak.
Az alábbiakban ezeket az észrevételeket fogjuk bizonyítani.

A) $\boldsymbol{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$

A bizonyítást közvetlenül megkapjuk, ha mindkét oldalra felírjuk a binomiális együtthatók definícióját.

B) $\boldsymbol{\binom{n}{k-1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{k}{n-k+1}}$

Bizonyítás
Fejezzük ki az $\binom{n}{k-1}$-et az $\binom{n}{k}$ segítségével! Ehhez az $\binom{n}{k-1}$ definíciójában végezzük el a következő átalakítást:

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}$$

Bővítsük a jobb oldalon álló törtet k-val, majd rendezzük át az alábbi módon. Közben kihasználjuk, hogy $k \cdot (k–1)! = k!$

$$\binom{n}{k-1} = \frac{k \cdot n!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{k}{n-k+1}$$

A jobb oldali szorzat első tényezője $\binom{n}{k}$-val egyenlő, így megkapjuk a tétel állítását:

$$\binom{n}{k-1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{k}{n-k+1}$$

C) $\mathbf{0 \leq k \leq \frac{n}{2}}$ **esetén:** $\boldsymbol{\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}}$ **és** $\mathbf{\frac{n}{2} \leq k \leq n}$ **esetén:** $\boldsymbol{\binom{n}{k-1} > \binom{n}{k}}$

A tételt röviden úgy is megfogalmazhatjuk, hogy rögzített n-re $k \leq \frac{n}{2}$-ig a binomiális együtthatók szigorúan monoton növekvő, $k \geq \frac{n}{2}$ esetén pedig szigorúan monoton csökkenő sorozatot alkotnak.

Bizonyítás

Hasonlítsuk össze az $\binom{n}{k-1}$ és az $\binom{n}{k}$ értékét!

a) Milyen k értékekre lesz az $\binom{n}{k-1}$ kisebb, mint az $\binom{n}{k}$?

Az előző tétel szerint $\binom{n}{k-1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{k}{n-k+1}$, így

$$\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k} \;\Leftrightarrow\; \frac{k}{n-k+1} < 1 \;\Leftrightarrow\; k < n-k+1 \;\Leftrightarrow\; 2k < n+1 \;\Leftrightarrow\; k < \frac{n+1}{2}$$

Mivel a k és az n pozitív egész számok, ez utóbbi egyenlőtlenség ekvivalens a $k \leq \frac{n}{2}$ egyenlőtlenséggel. (Például $k = 4$ és $n = 8$ esetén: $k < \frac{8+1}{2} = 4{,}5$, tehát $k \leq \frac{8}{2} = 4$. $k = 4$ és $n = 9$ esetén: $k < \frac{9+1}{2} = 5$, tehát legfeljebb 4 lehet. Ezért teljesül a $k \leq \frac{9}{2} = 4{,}5$ egyenlőtlenség is.)

Ezzel bizonyítottuk, hogy $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$ esetén: $\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}$.

b) Milyen k értékekre lesz az $\binom{n}{k-1}$ nagyobb, mint az $\binom{n}{k}$?

Az a) részből és az $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ összefüggésből következik, hogy $\frac{n}{2} \leq k \leq n$ esetén: $\binom{n}{k-1} > \binom{n}{k}$.

Javasoljuk az Olvasónak, hogy ezt az egyenlőtlenséget az a) részhez hasonló módon is bizonyítsa be.

D) Adott páros $\boldsymbol{n}$ **esetén a binomiális együtthatók maximális értéke** $\boldsymbol{\binom{n}{n/2}}$**, páratlan** $\boldsymbol{n}$**-nél pedig** $\boldsymbol{\binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2}}$**.**

Ez azt jelenti, hogy páros n-ek esetén $k = n/2$-nél, páratlan n-ek esetén pedig $k = (n-1)/2$-nél és $k = (n+1)/2$-nél lesz maximális az együtthatók értéke.

Bizonyítás

A C) tétel kimondja, hogy a binomiális együtthatók értéke $k_1 \leq \frac{n}{2}$ esetén szigorúan monoton nő, $\frac{n}{2} \leq k_2$ esetén pedig szigorúan monoton csökken.

a) Ha az n páros, akkor $\binom{n}{k_1} < \binom{n}{n/2}$ és $\binom{n}{n/2} > \binom{n}{k_2}$. A maximumhely tehát $k = n/2$.

b) Ha az n páratlan, akkor $k_1 \leq \frac{n}{2} \;\Leftrightarrow\; k_1 \leq \frac{n-1}{2}$, továbbá $k_2 \geq \frac{n}{2} \;\Leftrightarrow\; k_2 \geq \frac{n+1}{2}$. Így:

$$\binom{n}{k_1} < \binom{n}{(n-1)/2} \text{ és } \binom{n}{(n+1)/2} > \binom{n}{k_2}$$

Mivel $n - \frac{n-1}{2} = \frac{2n-n+1}{2} = \frac{n+1}{2}$, továbbá $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, ezért $\binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2}$. A binomiális együtthatók értéke tehát erre a két k-ra lesz maximális (és egymással megegyező):

$$\binom{n}{k_1} < \binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2} > \binom{n}{k_2}$$