A sajáttávolság maximális értéke

Határozzuk meg, hogy egy űrutazás adott Δt időtartama alatt mekkora állandó sebesség esetén éri el az űrhajóból mért sajáttávolság (mozgási hossz) a maximális értéket, továbbá mekkora ez a maximum! A Δt időtartamot a Földön mérjük, amit inerciarendszernek tekintünk.

Megoldás

A sajáttávolság a sebesség és a sajátidő szorzatával egyezik meg: $\Delta\sigma = v \cdot \Delta\tau$. Az űrhajó sajátideje az idődilatációra vonatkozó képlet szerint:

$$\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ahol a c a fénysebességet jelöli. Így:

$$\Delta\sigma = v \cdot \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{v}{c} \cdot c \cdot \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Az utolsó átalakítást azért végeztük el, hogy dimenzió nélküli mennyiségekkel számoljunk.

Mivel a $c \cdot \Delta t$ állandó, a kifejezés ott éri el a maximumát, ahol a $\frac{v}{c} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ maximális lesz. Jelöljük a v/c hányadost β-val ($0 \le \beta \le 1$). Keressük tehát a

$$\beta \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{\beta^2 \cdot (1 - \beta^2)}$$

kifejezés maximumhelyét és maximumértékét.

A számtani és mértani középre vonatkozó összefüggés alapján:

$$\sqrt{\beta^2 \cdot (1 - \beta^2)} \le \frac{\beta^2 + (1 - \beta^2)}{2}$$

A maximumértéket az egyenlőség esetén kapjuk meg, ami akkor áll fenn, ha $\beta^2 = 1 - \beta^2$. Azaz:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$$

Ebből a maximális érték:

$$\frac{\beta^2 + (1 - \beta^2)}{2} = \frac{1}{2}$$

Tehát a fénysebesség 71%-ával haladva érjük el a sajáttávolság maximumát, amely:

$$\Delta\sigma_{max} = \frac{c \cdot \Delta t}{2}$$

Ez éppen akkora, mintha a fénysebesség 50%-ával távolodtunk volna Δt ideig.

Összeállította: Juhász Tibor