

## A relativisztikus sebességösszeadás vizsgálata

### 1. Ellentétes irányú fénysebességek

A  $v_1 = c$  és  $v_2 = -c$  esetén a sebességösszeadás relativisztikus képlete nem használható, mert a nevező (továbbá a számláló is) 0 lesz:

$$u = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{c - c}{1 - \frac{c \cdot c}{c^2}} = \frac{0}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Írjunk a  $v_1$  helyére  $c$ -t, a negatív  $v_2$  helyett pedig számoljunk az abszolútértékével! Egyelőre a  $v_2$  legyen kisebb, mint a  $c$ :

$$u = \frac{c - v_2}{1 - \frac{c \cdot v_2}{c^2}}, \quad v_2 < c$$

Egyszerűsítsük a nevezőben lévő törtet  $c$ -vel, majd szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt is  $c$ -vel:

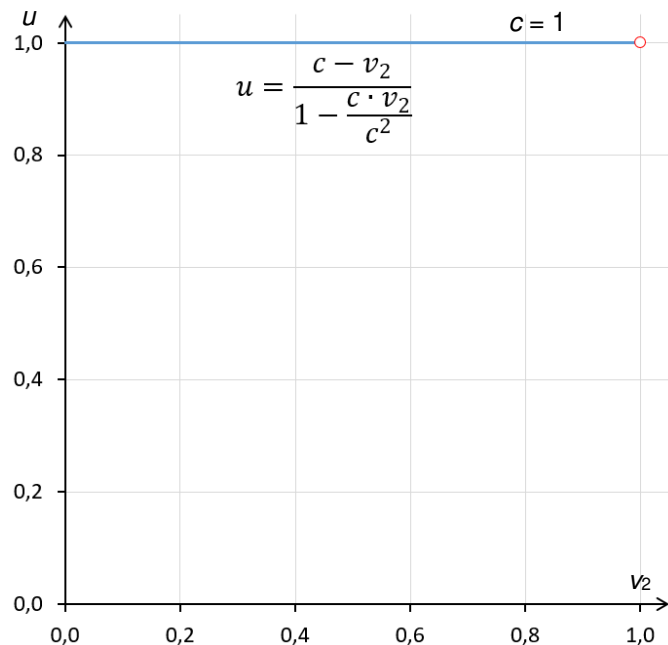
$$u = \frac{c - v_2}{1 - \frac{v_2}{c}} = \frac{c(c - v_2)}{c - v_2}$$

A kapott eredményt minden  $v_2 \neq c$  esetén lehet egyszerűsíteni:

$$u = \frac{c(c - v_2)}{c - v_2} = c, \quad \text{ha } v_2 \neq c$$

Akármilyen közel van a  $v_2$  a  $c$ -hez, az eredmény  $c$  lesz. Ezt úgy értelmezzük, hogy  $v_2 = c$  esetén is  $c$ -vel egyenlő a sebességek összege. A matematikusok ezt úgy fejezik ki, hogy a tört határértéke  $c$ .

Két, egymással egyenlő nagyságú és ellentétes irányú sebesség összege általában 0 (a relativisztikus sebességösszeadás képlete szerint is), de ha legalább az egyik a fénysebességgel egyezik meg, akkor az összeg marad a fénysebesség.



### 2. Egyirányú sebességek összegének maximuma

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges,  $0 \leq v_1, v_2 \leq c$  sebességek esetén sem lesz nagyobb a relativisztikus összeg a fénysebességnél, azaz:

$$\frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \leq c$$

Induljunk ki a feltétel szerinti

$$v_1 \leq c$$

egyenlőtlenségből! Mivel  $v_2 \leq c$ , így  $0 \leq c - v_2$ . megszorozhatjuk tehát az egyenlőtlenséget  $c - v_2$ -vel (nem változik meg az iránya):

$$v_1 \cdot (c - v_2) \leq c \cdot (c - v_2)$$

Bontsuk fel a zárójeleket, és rendezzük át az egyenlőtlenséget:

$$v_1 c - v_1 v_2 \leq c^2 - c v_2$$

$$v_1 c + c v_2 \leq c^2 + v_1 v_2$$

A jobb oldalon emeljük ki mindkét tagból  $c^2$ -et:

$$v_1 c + c v_2 \leq c^2 \left( 1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right)$$

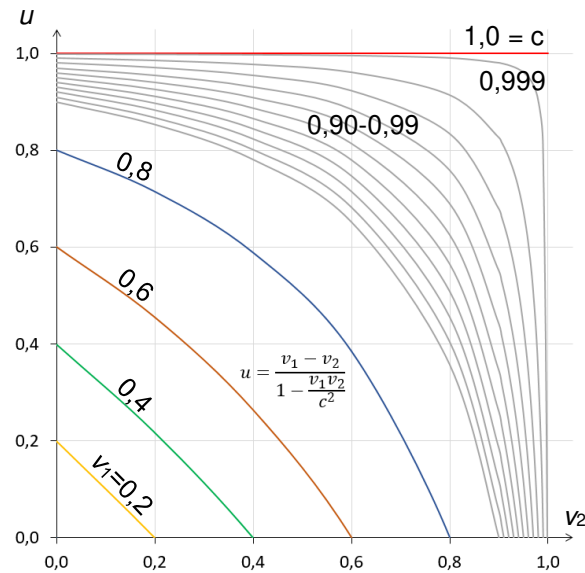
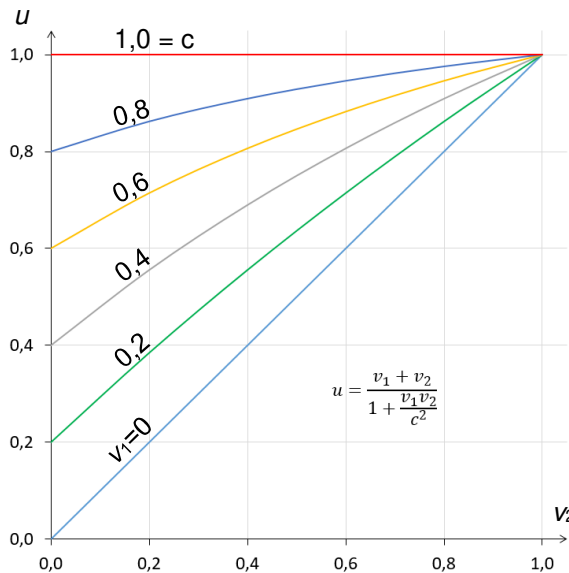
Osszuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát  $c$ -vel, majd  $1 + v_1 v_2 / c^2$ -tel:

$$v_1 + v_2 \leq c \left( 1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right)$$

$$\frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \leq c$$

Ezt az egyenlőtlenséget akartunk bizonyítani.

Sebességösszeadással tehát nem léphető túl a fénysebesség.



### 3. Ellentétes irányú sebességek összegének maximuma

Bizonyítsuk be az előző pontban szereplő egyenlőtlenséget ellentétes irányú sebességek esetén! Legyen  $0 \leq v_2 \leq v_1 < c$  (a  $v_1=c$  esetet az 1. pontban vizsgáltuk meg). A sebességek ellentétes irányát az előjel helyett a sebességösszeadás képletében vesszük figyelembe:

$$\frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} \leq c$$

Induljunk ki a feltétel szerinti

$$v_1 < c$$

egyenlőtlenségből. Mivel  $0 \leq v_2$ , így  $0 \leq c + v_2$ . megszorozhatjuk tehát az egyenlőtlenséget  $c + v_2$ -vel (nem változik meg az iránya):

$$v_1 \cdot (c + v_2) < c \cdot (c + v_2)$$

Bontsuk fel a zárójeleket, és rendezzük át az egyenlőtlenséget:

$$v_1 c + v_1 v_2 < c^2 + c v_2$$

$$v_1 c - c v_2 < c^2 - v_1 v_2$$

A jobb oldalon emeljük ki mindkét tagból  $c^2$ -et:

$$v_1 c - c v_2 < c^2 \left(1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)$$

Osszuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát  $c$ -vel, majd  $1 - v_1 v_2 / c^2$ -tel (ez utóbbi pozitív szám, mert  $v_1, v_2 < c$ ):

$$v_1 + v_2 < c \left(1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)$$

$$\frac{v_1 + v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} < c$$

Az 1. pont alapján,  $v_1 = c$  esetén a bal oldali tört értéke éppen  $c$ , így tetszőleges  $0 \leq v_2 \leq v_1 \leq c$  sebességekre:

$$\frac{v_1 + v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} \leq c$$

Ezt az egyenlőtlenséget akartunk bizonyítani.

Figyeljük meg, hogy a nevező kisebb, mint 1, ezért az  $u$  értéke nagyobb, mint a klasszikus fizika alapján számított  $v_1 + v_2$  különbség.

Hasonlítsuk össze a 2. és 3. pontban szereplő levezetéseket! Szükség volt külön az ellentétes irányú sebességek vizsgálatára?

*Összeállította: Juhász Tibor*