

## A sebességösszeadásra vonatkozó egyenlet megoldása

Határozzuk meg a videóban felírt

$$(u - v_2) \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} = v_1 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}$$

egyenlet alapján az  $u$  értékét!

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát:

$$(u - v_2)^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) = v_1^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)$$

Ha felbontjuk a zárójeleket, akkor láthatjuk, hogy az  $u$ -ra másodfokú egyenletet kapunk. Ezért először inkább a  $v_1$ -et fogjuk kifejezni.

Jelöljük a  $v_1$ -et nem tartalmazó tényezőket  $A$ -val, illetve  $B$ -vel:

$$A = (u - v_2)^2 \quad B = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)$$

Így az egyenlet:

$$A \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) = v_1^2 B$$

Vagyis:

$$A - A \frac{v_1^2}{c^2} = B v_1^2$$

Átrendezve, és kifejezve a  $v_1$ -et, kapjuk, hogy:

$$A = A \frac{v_1^2}{c^2} + B v_1^2$$

$$v_1^2 = \frac{A}{\frac{A}{c^2} + B}$$

Visszaírva az  $A$  és a  $B$  értékét:

$$v_1^2 = \frac{(u - v_2)^2}{\frac{(u - v_2)^2}{c^2} + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}$$

Vizsgáljuk meg a nevezőt! Az első tagban végezzük el a négyzetre emelést, a második tagban pedig bontsuk fel a zárójeleket:

$$\frac{A}{c^2} + B = \frac{(u - v_2)^2}{c^2} + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right) = \frac{u^2}{c^2} - \frac{2uv_2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} + 1 - \frac{u^2}{c^2} - \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{u^2 v_2^2}{c^4}$$

A jelölt tagok kiesnek, a maradék pedig teljes négyzet:

$$\frac{A}{c^2} + B = -\frac{2uv_2}{c^2} + 1 + \frac{u^2 v_2^2}{c^4} = \left(1 - \frac{uv_2}{c^2}\right)^2$$

A  $v_1$  négyzetére kapjuk tehát, hogy:

$$v_1^2 = \frac{A}{\frac{A}{c^2} + B} = \frac{(u - v_2)^2}{\left(1 - \frac{uv_2}{c^2}\right)^2}$$

Mivel a gyorsvonat megelőzi a személyvonatot, ezért  $u > v_2$ , továbbá  $uv_2 < c^2$ . Így:

$$v_1 = \frac{u - v_2}{1 - \frac{uv_2}{c^2}}$$

Ebből az összefüggésből már könnyen megkaphatjuk az  $u$  értékét. Szorozzuk meg mindkét oldalt a nevezővel, majd bontsuk fel a zárójelet:

$$v_1 \left(1 - \frac{uv_2}{c^2}\right) = u - v_2$$

$$v_1 - \frac{uv_1v_2}{c^2} = u - v_2$$

Átrendezve:

$$v_1 + v_2 = u + \frac{uv_1v_2}{c^2} = u \left(1 + \frac{v_1v_2}{c^2}\right)$$

A végeredmény tehát:

$$u = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1v_2}{c^2}}$$

*Összeállította: Juhász Tibor*