A relativisztikus sebességösszeadás vizsgálata

1. Ellentétes irányú fénysebességek

A $v_1 = c$ és $v_2 = -c$ esetén a sebességösszeadás relativisztikus képlete nem használható, mert a nevező (továbbá a számláló is) 0 lesz:

$$u = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{c - c}{1 - \frac{c \cdot c}{c^2}} = \frac{0}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Írjunk a v_1 helyére c-t, a negatív v_2 helyett pedig számoljunk az abszolútértékével! Egyelőre a v_2 legyen kisebb, mint a c:

$$u = \frac{c - v_2}{1 - \frac{c \cdot v_2}{c^2}}, \qquad v_2 < c$$

Egyszerűsítsük a nevezőben lévő törtet c-vel, majd szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt is c-vel:

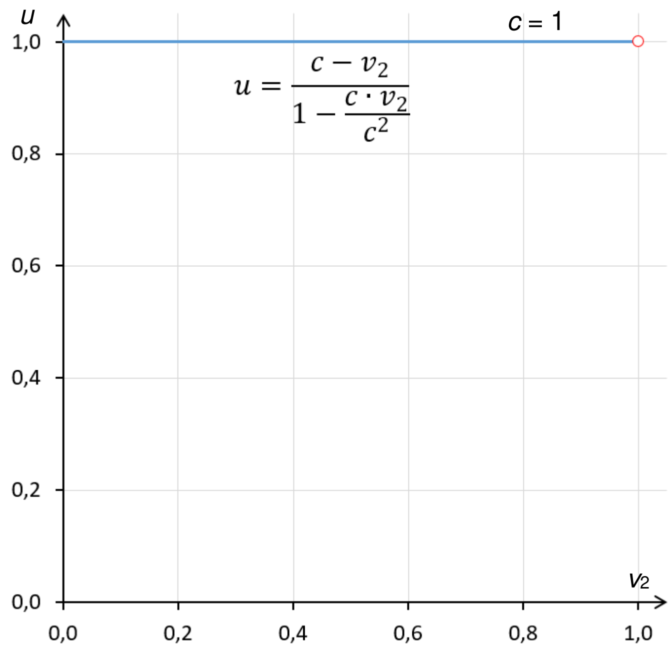
$$u = \frac{c - v_2}{1 - \frac{v_2}{c}} = \frac{c(c - v_2)}{c - v_2}$$

A kapott eredményt minden $v_2 \neq c$ esetén lehet egyszerűsíteni:

$$u = \frac{c(c - v_2)}{c - v_2} = c, \quad \text{ha } v_2 \neq c$$

Akármilyen közel van a v_2 a c-hez, az eredmény c lesz. Ezt úgy értelmezzük, hogy $v_2 = c$ esetén is c-vel egyenlő a sebességek összege. A matematikusok ezt úgy fejezik ki, hogy a tört határértéke c.

Két, egymással egyenlő nagyságú és ellentétes irányú sebesség összege általában 0 (a relativisztikus sebességösszeadás képlete szerint is), de ha legalább az egyik a fénysebességgel egyezik meg, akkor az összeg marad a fénysebesség.



2. Egyirányú sebességek összegének maximuma

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges, $0 \leq v_1, v_2 \leq c$ sebességek esetén sem lesz nagyobb a relativisztikus összeg a fénysebességnél, azaz:

$$\frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \leq c$$

Induljunk ki a feltétel szerinti

$$v_1 \leq c$$

egyenlőtlenségből! Mivel $v_2 \leq c$, így $0 \leq c - v_2$. Megszorozhatjuk tehát az egyenlőtlenséget $c-v_2$-vel (nem változik meg az iránya):

$$v_1 \cdot (c - v_2) \leq c \cdot (c - v_2)$$

Bontsuk fel a zárójeleket, és rendezzük át az egyenlőtlenséget:

$$v_1 c - v_1 v_2 \leq c^2 - c v_2$$

$$v_1 c + c v_2 \leq c^2 + v_1 v_2$$

A jobb oldalon emeljünk ki mindkét tagból c^2-et:

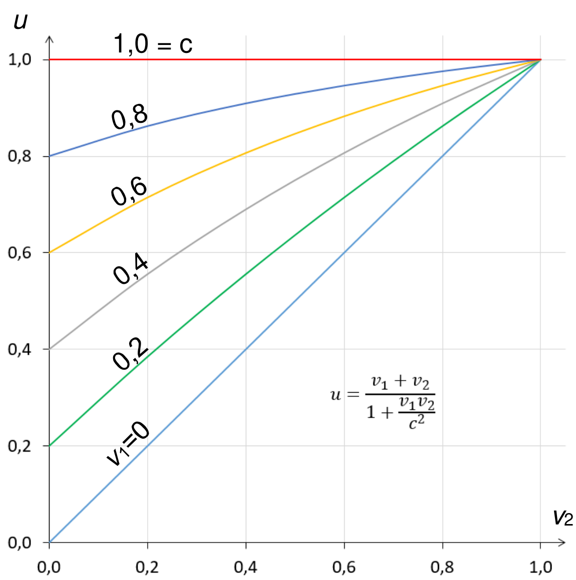
$$v_1 c + c v_2 \leq c^2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)$$

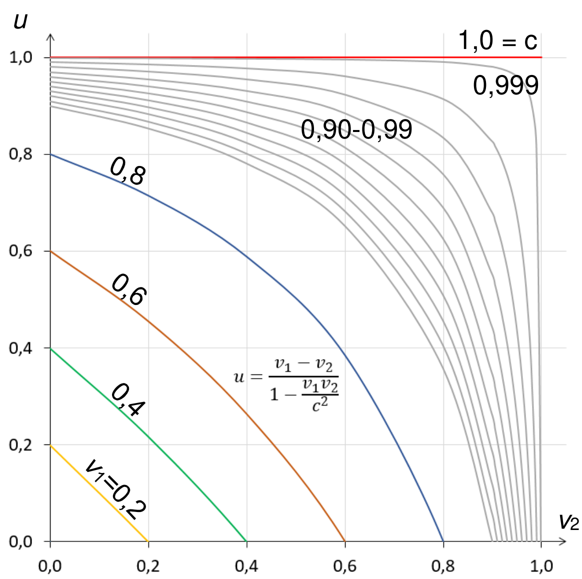
Osszuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát c-vel, majd $1+v_1v_2/c^2$-tel:

$$v_1 + v_2 \leq c \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)$$

$$\frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \leq c$$

Ezt az egyenlőtlenséget akartunk bizonyítani.
Sebességösszeadással tehát nem léphető túl a fénysebesség.





3. Ellentétes irányú sebességek összegének maximuma

Bizonyítsuk be az előző pontban szereplő egyenlőtlenséget ellentétes irányú sebességek esetén! Legyen $0 \leq v_2 \leq v_1 < c$ (a $v_1 = c$ esetet az 1. pontban vizsgáltuk meg). A sebességek ellentétes irányát az előjel helyett a sebességösszeadás képletében vesszük figyelembe:

$$\frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} \leq c$$

Induljunk ki a feltétel szerinti

$$v_1 < c$$

egyenlőtlenségből. Mivel $0 \leq v_2$, így $0 \leq c + v_2$. Megszorozhatjuk tehát az egyenlőtlenséget $c+v_2$-vel (nem változik meg az iránya):

$$v_1 \cdot (c + v_2) < c \cdot (c + v_2)$$

Bontsuk fel a zárójeleket, és rendezzük át az egyenlőtlenséget:

$$v_1 c + v_1 v_2 < c^2 + c v_2$$

$$v_1 c - c v_2 < c^2 - v_1 v_2$$

A jobb oldalon emeljünk ki mindkét tagból c^2-et:

$$v_1 c - c v_2 < c^2 \left(1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)$$

Osszuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát c-vel, majd $1 - v_1 v_2 / c^2$-tel (ez utóbbi pozitív szám, mert v_1, $v_2 < c$):

$$v_1 + v_2 < c \left(1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)$$

$$\frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} < c$$

Az 1. pont alapján, $v_1 = c$ esetén a bal oldali tört értéke éppen c, így tetszőleges $0 \leq v_2 \leq v_1 \leq c$ sebességekre:

$$\frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} \leq c$$

Ezt az egyenlőtlenséget akartunk bizonyítani.

Figyeljük meg, hogy a nevező kisebb, mint 1, ezért az u értéke nagyobb, mint a klasszikus fizika alapján számított $v_1 - v_2$ különbség.

Hasonlítsuk össze a 2. és 3. pontban szereplő levezetéseket! Szükség volt külön az ellentétes irányú sebességek vizsgálatára?

Összeállította: Juhász Tibor