Relativisztikus sebességösszeadás és a hiperbolikus koszinusztétel

Két, tetszőleges $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ sebesség relativisztikus összege:

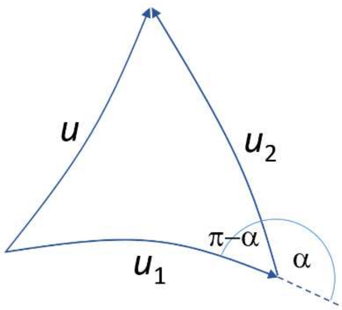
$$\underline{v} = \frac{1}{1+\frac{\underline{v}_1\cdot\underline{v}_2}{c^2}}\left\{\underline{v}_1 + \frac{\underline{v}_2}{\gamma_1} + \frac{\gamma_1}{c^2(1+\gamma_1)}\left(\underline{v}_1\cdot\underline{v}_2\right)\cdot\underline{v}_1\right\}$$

ahol $\gamma_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{\underline{v}_1{}^2}{c^2}}}$, a vektorok között pedig skaláris szorzást végzünk.

A sebesség nagysága:

$$v^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha - \left(\frac{v_1v_2}{c}\sin\alpha\right)^2}{\left(1+\frac{v_1v_2}{c^2}\cos\alpha\right)^2}$$

ahol az α a $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ sebességek által közbezárt szög.[1]



Megmutatjuk, hogy a $\underline{v}$ sebesség nagyságát a Bolyai–Lobacsevszkij-geometria koszinusztételével lehet meghatározni. A koszinusztételt egy olyan hiperbolikus háromszögre kell felírni, melynek oldalai megfelelnek a sebességek u, u_1 és u_2 sebességparamétereinek, továbbá u_1 és u_2 oldala π–α szöget zár be egymással.

A sebesség nagyságát kifejező egyenlet mindkét oldalát osszuk el c^2-tel (a c a fénysebességet jelöli):

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{2v_1v_2}{c^2}\cos\alpha - \frac{v_1^2}{c^2}\frac{v_2^2}{c^2}\sin^2\alpha}{\left(1+\frac{v_1v_2}{c^2}\cos\alpha\right)^2}$$

Közben a számlálóban felbontottuk a zárójelet.

Alkalmazzuk a relatív sebességre vonatkozó $\beta = v/c$ összefüggést:

$$\beta^2 = \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + 2\beta_1\,\beta_2\cos\alpha - \beta_1^2\beta_2^2\sin^2\alpha}{(1+\beta_1\,\beta_2\cos\alpha)^2}$$

Vonjuk ki mindkét oldalt 1-ből, a jobb oldalon mindjárt hozzunk közös nevezőre:

$$1-\beta^2 = \frac{1 + 2\beta_1\,\widetilde{\beta_2\cos}\,\alpha + \beta_1^2\beta_2^2\cos^2\alpha - \beta_1^2 - \beta_2^2 - 2\beta_1\,\widetilde{\beta_2\cos}\,\alpha + \beta_1^2\beta_2^2\sin^2\alpha}{(1+\beta_1\,\beta_2\cos\alpha)^2}$$

A jelölt tagok kiesnek. A lehetséges kiemelést elvégezve, és felhasználva a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ azonosságot:

$$1-\beta^2 = \frac{1-\beta_1^2-\beta_2^2+\beta_1^2\beta_2^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{(1+\beta_1\,\beta_2\cos\alpha)^2} = \frac{1-\beta_1^2-\beta_2^2+\beta_1^2\beta_2^2}{(1+\beta_1\,\beta_2\cos\alpha)^2} = \frac{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}{(1+\beta_1\,\beta_2\cos\alpha)^2}$$

Közben elvégeztük a számláló szorzattá alakítását.

[1] A levezetést lásd például: https://en.wikipedia.org/wiki/Velocity-addition_formula#Standard_configuration (*Details for u*)

Vonjunk gyököt mindkét oldalból, és vegyük a reciprokokat:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1+\beta_1\,\beta_2\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}}+\frac{\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\frac{\beta_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}}\cos\alpha$$

A téridő trigonometriáját bemutató 6.3. kitérőben felírtuk a

$$\operatorname{ch} u=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,\quad \text{illetve az}\quad \operatorname{sh} u=\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

összefüggéseket, ahol $u = \operatorname{ath}\beta$. Ezeket felhasználva:

$$\operatorname{ch} u=\operatorname{ch} u_1\operatorname{ch} u_2+\operatorname{sh} u_1\operatorname{sh} u_2\cos\alpha$$

vagy, a $\cos\alpha = -\cos(\pi-\alpha)$ összefüggés alapján:

$$\operatorname{ch} u=\operatorname{ch} u_1\operatorname{ch} u_2-\operatorname{sh} u_1\operatorname{sh} u_2\cos(\pi-\alpha)$$

Ez pedig megfelel a Bolyai–Lobacsevszkij-geometriában az oldalakra vonatkozó koszinusztételnek.

Összeállította: Juhász Tibor