Négyesgyorsulás és négyeserő

A levezetéseknél felhasználjuk a függvények szorzatának, továbbá a hatványfüggvénynek és az összetett függvénynek a deriválására vonatkozó szabályt. A skaláris szorzatra vonatkozó tudnivalókat a dokumentum végén foglaljuk össze.

Tartalom

A négyesgyorsulás

Az alábbiakban a négyessebességet $\underline{v}_4$-gyel, a négyesgyorsulást pedig $\underline{a}_4$-gyel jelöljük. Az egyszerűség kedvéért azonban a hármassebességnél, illetve a hármasgyorsulásnál elhagyjuk a 3-as indexet: $\underline{v}_3 = \underline{v}$, $\underline{a}_3 = \underline{a}$. Az aláhúzás nélküli dőlt betű a hármasvektorok nagyságát (abszolút értékét) jelzi: $v = |\underline{v}_3|$, $a = |\underline{a}_3|$.

Határozzuk meg a téridőben a testek gyorsulását, azaz a négyesgyorsulást!

A négyesgyorsulás definíció szerint megegyezik a négyessebességnek a sajátidő szerinti deriváltjával (a vektorokat komponensenként deriváljuk):

$$\underline{a}_4 = \frac{d\underline{v}_4}{d\tau} \tag{1}$$

A $\tau = t/\gamma$ alapján:

$$\underline{a}_4 = \gamma \frac{d\underline{v}_4}{dt} \tag{2}$$

Mivel $\underline{v}_4 = (\gamma \cdot c, \gamma \cdot v_x, \gamma \cdot v_y, \gamma \cdot v_z) = (\gamma \cdot c, \gamma \cdot \underline{v}_3) = (\gamma \cdot c, \gamma \cdot \underline{v})$, ezért komponensenként deriválva (a γ függ az időtől!):

$$\underline{a}_4 = \gamma \frac{d\underline{v}_4}{dt} = \gamma \frac{d(\gamma c,\ \gamma \underline{v})}{dt} = \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt} \cdot c,\ \ \frac{d\gamma}{dt} \cdot \underline{v} + \gamma \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} \right) \tag{3}$$

A második komponensnél kihasználtuk a szorzatfüggvény deriválási szabályát.

A $d\underline{v}/dt$ tényező a hármassebesség idő szerinti deriváltja. Ez megegyezik a hármasgyorsulással, így:

$$\frac{d\underline{v}_4}{dt} = \left(\frac{d\gamma}{dt} \cdot c,\ \ \frac{d\gamma}{dt} \cdot \underline{v} + \gamma \cdot \underline{a} \right) \tag{4}$$

A $d\gamma/dt$-t az összetett függvény deriválási szabálya alapján határozzuk meg (a γ függ a v-től, a v pedig a t-től):

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} \tag{5}$$

Lássuk először a $d\gamma/dv$-t! Mivel

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{6}$$

ezért az összetett függvény és a hatványfüggvény deriválási szabálya alapján:

$$\frac{d\gamma}{dv} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{-2v}{c^2} = \gamma^3 \cdot \frac{v}{c^2} \tag{7}$$

A dv/dt meghatározásánál ügyeljünk arra, hogy a sebesség *nagyságát* deriváljuk! Használjuk fel a

$$v = |\underline{\mathrm{v}}| = (v^2)^{\frac{1}{2}} = (\underline{\mathrm{v}} \cdot \underline{\mathrm{v}})^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

összefüggéseket, ahol a vektorokat skalárisan szorozzuk össze. Ennek alapján, alkalmazva a szorzat- és az összetett függvény deriválási szabályát (a $\underline{\mathrm{v}}$ függ az időtől!):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}(v^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{d\underline{\mathrm{v}}}{dt} \cdot \underline{\mathrm{v}} + \underline{\mathrm{v}} \cdot \frac{d\underline{\mathrm{v}}}{dt}\right) \tag{9}$$

A zárójel előtti tényező az alapfüggvény deriváltja, a zárójelben lévő összeg pedig a belső függvény deriváltja, de a $\underline{\mathrm{v}}\cdot\underline{\mathrm{v}}$ forma alapján. Mivel $d\underline{\mathrm{v}}/dt = \underline{\mathrm{a}}$, így

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{v^2}} \cdot (\underline{\mathrm{a}} \cdot \underline{\mathrm{v}} + \underline{\mathrm{v}} \cdot \underline{\mathrm{a}}) = \frac{2\underline{\mathrm{v}} \cdot \underline{\mathrm{a}}}{2v} = \frac{\underline{\mathrm{v}} \cdot \underline{\mathrm{a}}}{v} \tag{10}$$

Összesítve az eddigieket:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = \gamma^3 \cdot \frac{v}{c^2} \cdot \frac{\underline{\mathrm{v}} \cdot \underline{\mathrm{a}}}{v} = \gamma^3 \cdot \frac{\underline{\mathrm{v}} \cdot \underline{\mathrm{a}}}{c^2} \tag{11}$$

Ezért

$$\frac{d\underline{\mathrm{v}}_4}{dt} = \left(\frac{d\gamma}{dt} \cdot c,\ \ \frac{d\gamma}{dt} \cdot \underline{\mathrm{v}} + \gamma \cdot \underline{\mathrm{a}}\right) = \left(\gamma^3 \cdot \frac{\underline{\mathrm{v}} \cdot \underline{\mathrm{a}}}{c},\ \ \gamma^3 \cdot \frac{\underline{\mathrm{v}} \cdot \underline{\mathrm{a}}}{c^2} \cdot \underline{\mathrm{v}} + \gamma \cdot \underline{\mathrm{a}}\right) \tag{12}$$

A négyesgyorsulás tehát:

$$\underline{\mathrm{a}}_4 = \gamma \frac{d\underline{\mathrm{v}}_4}{dt} = \gamma\left(\gamma^3 \cdot \frac{\underline{\mathrm{v}} \cdot \underline{\mathrm{a}}}{c},\ \ \gamma^3 \cdot \frac{\underline{\mathrm{v}} \cdot \underline{\mathrm{a}}}{c^2} \cdot \underline{\mathrm{v}} + \gamma \cdot \underline{\mathrm{a}}\right) \tag{13}$$

γ-t kiemelve:

$$\underline{\mathrm{a}}_4 = \gamma^2\left(\gamma^2 \cdot \frac{\underline{\mathrm{v}} \cdot \underline{\mathrm{a}}}{c},\ \ \gamma^2 \cdot \frac{\underline{\mathrm{v}} \cdot \underline{\mathrm{a}}}{c^2} \cdot \underline{\mathrm{v}} + \underline{\mathrm{a}}\right) \tag{14}$$

ahol a vektorokat skalárisan szorozzuk össze. A hármasvektorokat ismét a 3-as indexszel jelölve:

$$\boxed{\underline{\mathrm{a}}_4 = \gamma^2\left(\gamma^2 \cdot \frac{\underline{\mathrm{v}}_3 \cdot \underline{\mathrm{a}}_3}{c},\ \ \gamma^2 \cdot \frac{\underline{\mathrm{v}}_3 \cdot \underline{\mathrm{a}}_3}{c^2} \cdot \underline{\mathrm{v}}_3 + \underline{\mathrm{a}}_3\right)} \tag{15}$$

Speciális esetek

A négyesgyorsulásra vonatkozóan vizsgáljunk meg két speciális esetet!

Először tekintsük a t időpillanatban azt a vonatkoztatási rendszert, amelyhez viszonyítva a test pillanatnyi sebessége éppen 0, azaz $\underline{v}_3 = \underline{0}$. Ekkor:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{0^2}{c^2}}} = 1 \tag{16}$$

$$\underline{a}_4 = \gamma^2\left(0,\ \underline{a}_3\right) = \left(0,\ \underline{a}_3\right) \tag{17}$$

Azaz a négyesgyorsulásnak ebben a pillanatban nincs időbeli komponense. Ezt az eredményt felhasználjuk a *Relativisztikus dinamika* – 1. videóban.

Egy tetszőleges inerciarendszerben pedig, ha a hármassebesség és a hármasgyorsulás merőleges egymásra, akkor a skaláris szorzatuk $\underline{v}_3 \cdot \underline{a}_3 = 0$. Ezt (15)-be beírva:

$$\underline{a}_4 = \gamma^2\left(0,\ \underline{a}_3\right) = \left(0,\ \gamma^2\underline{a}_3\right) \tag{18}$$

Az egyenletes körmozgásnál például a centripetális gyorsulás nagysága a klasszikus fizika szerint $|\underline{a}_3| = v^2/r$, ahol v a kerületi sebesség nagysága, az r pedig a körpálya sugara. A relativitáselmélet alapján azonban a centripetális gyorsulásnak (a négyesgyorsulás térbeli komponensének) a nagysága:

$$a_{cp} = \gamma^2\left|\underline{a}_3\right| = \frac{v^2/r}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{19}$$

Ez pedig γ^2-szer nagyobb, mint a klasszikus fizika v^2/r értéke. Ez utóbbi képletnek megfelelően a centripetális gyorsulás maximális értéke c^2/r lehetne ($v = c$ esetén), míg a relativisztikus összefüggés szerint a sebesség növekedésével a gyorsulás a végtelenhez tart (egyre nagyobb erő szükséges a körmozgás fennmaradásához!).

A négyessebesség és a négyesgyorsulás iránya

A négyesgyorsulás mindig merőleges a négyessebességre. A speciális eseteknél említett vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva ($\underline{v}_3 = \underline{0}$, $\gamma = 1$) például:

$$\underline{v}_4 = \gamma\left(\mathrm{c},\ 0,\ 0,\ 0\right) = \left(c,\ 0,\ 0,\ 0\right) \tag{20}$$

$$\underline{a}_4 = \gamma^2\left(0,\ \underline{a}_3\right) = \left(0,\ a_x,\ a_y,\ a_z\right) \tag{21}$$

Így a skaláris szorzat:

$$\underline{v}_4 \cdot \underline{a}_4 = c \cdot 0 - 0 \cdot a_x - 0 \cdot a_y - 0 \cdot a_z = 0 \tag{22}$$

amit a négydimenziós téridőben is úgy értelmezünk, hogy a két vektor merőleges egymásra.

A merőlegességet a vonatkoztatási rendszertől függetlenül szintén könnyen igazolhatjuk. Deriváljuk ugyanis a $\underline{v}_4 \cdot \underline{v}_4$ skaláris szorzatot a τ sajátidő szerint. A hatványfüggvény deriváltjára vonatkozó szabály alapján:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underline{v}_4 \cdot \underline{v}_4\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\underline{v}_4\right)^2 = 2\underline{v}_4\frac{d\underline{v}_4}{d\tau} \tag{23}$$

A $\underline{v}_4 \cdot \underline{v}_4$ skaláris szorzat éppen a $\underline{v}_4$ négyessebesség nagyságának a négyzete, amelyről tudjuk, hogy a fénysebesség négyzetével egyezik meg[1]. A $d\underline{v}_4/d\tau$ viszont éppen a négyesgyorsulás. Így:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underline{v}_4 \cdot \underline{v}_4\right) = \frac{d}{d\tau}\left(c^2\right) = 2\underline{v}_4 \cdot \underline{a}_4 \qquad (24)$$

A fénysebesség azonban időben állandó, az idő szerinti deriváltja 0. Vagyis:

$$0 = 2\underline{v}_4 \cdot \underline{a}_4 \quad \Rightarrow \quad \underline{v}_4 \cdot \underline{a}_4 = 0 \qquad (25)$$

A skaláris szorzat 0, tehát a $\underline{v}_4$·és az $\underline{a}_4$ vektorok merőlegesek egymásra.

Érdemes felírni a skaláris szorzatot a komponensek felhasználásával is. Elhagyva a hármasvektoroknál a 3-as indexet:

$$\underline{v}_4 = \left(\gamma c,\ \gamma \underline{v}\right) \qquad (26)$$

$$\underline{a}_4 = \left(\gamma^4 \cdot \frac{\underline{v} \cdot \underline{a}}{c},\ \gamma^4 \cdot \frac{\underline{v} \cdot \underline{a}}{c^2} \cdot \underline{v} + \gamma^2 \underline{a}\right) \qquad (27)$$

$$\underline{v}_4 \cdot \underline{a}_4 = \gamma^5 \cdot \underline{v} \cdot \underline{a} - \gamma^5 \cdot \frac{\underline{v} \cdot \underline{a}}{c^2} \cdot \underline{v} \cdot \underline{v} - \gamma^3 \cdot \underline{v} \cdot \underline{a} \qquad (28)$$

Az egyenlet jobb oldalán $\gamma^3 \underline{v} \cdot \underline{a}$-t kiemelve, és kihasználva, hogy $\underline{v} \cdot \underline{v} = v^2$:

$$\underline{v}_4 \cdot \underline{a}_4 = \gamma^3 \cdot \underline{v} \cdot \underline{a}\left(\gamma^2 - \gamma^2 \cdot \frac{v^2}{c^2} - 1\right) \qquad (29)$$

A zárójeles kifejezésben közös nevezőre hozva és összevonva:

$$\gamma^2 - \gamma^2 \cdot \frac{v^2}{c^2} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2} - 1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0 \qquad (30)$$

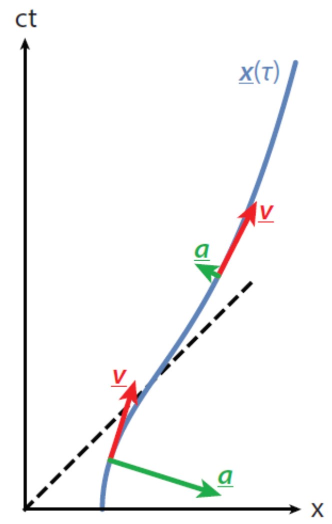
adódik. Így:

$$\underline{v}_4 \cdot \underline{a}_4 = 0 \qquad (31)$$

A két vektor skaláris szorzata 0, vagyis a két vektor merőleges egymásra. Ezzel teljesen általánosan bebizonyítottuk állításunkat.

A mechanikából ismeretes, hogy a sebességre merőleges gyorsulás a sebesség nagyságát nem változtatja meg, csak az irányát módosítja. Ezért a merőlegességre vonatkozó eredményünk teljesen összhangban van azzal az állításunkkal, hogy a téridőben a testek állandó nagyságú sebességgel mozognak, amely a fénysebességgel egyezik meg. A térbeli sebesség változása a téridőben a négyessebesség nagyságát nem, csak az irányát változtatja (azaz elfordul a téridőben).

A sebesség a háromdimenziós térben a $\underline{v} = d\underline{r}/dt$ definíciónak megfelelően a pályagörbe érintőjének irányába mutat (a húrok határhelyzete). Hasonló módon, a téridőben a $\underline{v}_4 = d\underline{r}_4/d\tau$ négyessebesség a világvonal érintőjének irányába mutat. A rá merőleges négyesgyorsulás nagysága éppen a világvonal görbületét jelzi, iránya pedig a görbületi középpont (a simulókör középpontja) felé mutat.[2]



A sebesség és a gyorsulás a téridőben

[1] Lásd https://youtu.be/Yx7TRhVOLH0?t=1225
[2] Lásd https://youtu.be/4-HC6oKuch4?t=991

Newton 2. törvénye

Newton 2. törvénye a klasszikus fizikában az erőt és a gyorsulást kapcsolja össze: $\underline{F} = m\underline{a}$. Mivel nem ismerjük a törvény relativisztikus alakját, ezért az erőt a lendület idő szerinti deriváltjaként írjuk fel (az erőhatás a lendületet változtatja). A továbbiakban csak hármasvektorokkal foglalkozunk. Ezért elhagyjuk a hármasvektorokat jelző indexeket:

$$\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m\underline{v})}{dt} = m\frac{d(\gamma\underline{v})}{dt} \tag{32}$$

A deriváltat már a négyessebesség deriválásánál meghatároztuk (lást a térbeli komponenst), így:

$$\underline{F} = m\left(\frac{d\gamma}{dt}\cdot\underline{v} + \gamma\cdot\frac{d\underline{v}}{dt}\right) = m\left(\gamma^3\cdot\frac{\underline{v}\cdot\underline{a}}{c^2}\cdot\underline{v} + \gamma\cdot\underline{a}\right) \tag{33}$$

(a vektorok között skaláris szorzást végzünk). Kissé átrendezve megkapjuk Newton 2. törvényének relativisztikus formáját:

$$\boxed{\underline{F} = \frac{\gamma^3 m}{c^2}\cdot(\underline{v}\cdot\underline{a})\cdot\underline{v} + \gamma m\cdot\underline{a}} \tag{34}$$

Szemléletesebb egyenlethez jutunk a következő átalakítással. Bontsuk fel a (hármas)gyorsulást a sebességgel párhuzamos, illetve arra merőleges komponensekre: $\underline{a} = \underline{a}_\perp + \underline{a}_\parallel$. Mind tudjuk, két, egymásra merőleges vektor skaláris szorzata 0, ezért:

$$\underline{v}\cdot\underline{a} = \underline{v}\cdot(\underline{a}_\perp + \underline{a}_\parallel) = \underline{v}\cdot\underline{a}_\parallel + \underbrace{\underline{v}\cdot\underline{a}_\perp}_{0} = \underline{v}\cdot\underline{a}_\parallel \tag{35}$$

Mivel az $\underline{a}_\parallel$ párhuzamos a $\underline{v}$-vel, a $(\underline{v}\cdot\underline{a}_\parallel)\cdot\underline{v}$ vektor nagysága $v^2 a_\parallel$, és az $\underline{a}_\parallel$ (vagy a $\underline{v}$) irányába mutat. Így:

$$(\underline{v}\cdot\underline{a})\cdot\underline{v} = v^2\underline{a}_\parallel \tag{36}$$

Az erő tehát:

$$\underline{F} = \frac{\gamma^3 m}{c^2}\cdot v^2\underline{a}_\parallel + \gamma m\cdot(\underline{a}_\perp + \underline{a}_\parallel) \tag{37}$$

vagy, kissé átrendezve:

$$\underline{F} = \frac{\gamma^3 m}{c^2}\cdot v^2\underline{a}_\parallel + \gamma m\cdot(\underline{a}_\perp + \underline{a}_\parallel) = \left(\frac{\gamma^3 m v^2}{c^2} + \gamma m\right)\underline{a}_\parallel + \gamma m\underline{a}_\perp \tag{38}$$

$$\underline{F} = \gamma^3 m\left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)\underline{a}_\parallel + \gamma m\underline{a}_\perp \tag{39}$$

$$\underline{F} = \gamma^3 m\left(\frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\underline{a}_\parallel + \gamma m\underline{a}_\perp \tag{40}$$

Így a hármaserő:

$$\boxed{\underline{F} = \gamma^3 m\underline{a}_\parallel + \gamma m\underline{a}_\perp} \tag{41}$$

A sebességgel párhuzamos $\underline{F}_\parallel$, illetve a sebességre merőleges $\underline{F}_\perp$ összetevők az $\underline{a}_\parallel$, illetve az $\underline{a}_\perp$ tagokból adódnak:

$$\underline{F}_\parallel = \gamma^3 m\underline{a}_\parallel \tag{42}$$

$$\underline{F}_\perp = \gamma m\underline{a}_\perp \tag{43}$$

Régebben a $\gamma^3 m$-et longitudinális (párhuzamos) tömegnek, a γm-et pedig transzverzális (merőleges) tömegnek nevezték, utalva az erőkomponenseknek a sebességhez viszonyított irányára. Ezek az elnevezések azonban (szerencsére) kimentek a divatból.

Figyeljük meg, hogy ha $v \ll c$, akkor $\gamma \approx 1$, ezért a (41) egyenletből visszakapjuk Newton 2. törvényének a klasszikus fizikában érvényes alakját:

$$\underline{\mathrm{F}} \approx m\underline{\mathrm{a}}_{\parallel} + m\underline{\mathrm{a}}_{\perp} = m\left(\underline{\mathrm{a}}_{\parallel} + \underline{\mathrm{a}}_{\perp}\right) = m\underline{\mathrm{a}} \tag{44}$$

Speciális esetben, ha a sebesség az x tengely irányába mutat (továbbá $\underline{\mathrm{v}} \parallel \underline{\mathrm{a}}_{\parallel}$), akkor (41) alapján:

$$F_x = \gamma^3 m a_x \tag{45}$$

$$F_y = \gamma m a_y \tag{46}$$

$$F_z = \gamma m a_z \tag{47}$$

Ezekből az egyenletekből a gyorsulás koordinátái könnyen kifejezhetők. Vegyük észre, hogy a γ szorzótényező miatt a gyorsulásvektor koordinátái függnek a sebességtől!

Bizonyítás nélkül megjegyzem, hogy a négyeserő térbeli komponense a hármaserő γ-szorosával egyezik meg, az időbeli komponens pedig a teljesítmény $\gamma(\underline{\mathrm{F}}_3 \cdot \underline{\mathrm{v}}_3)$ relativisztikus értékének c-ed része:

$$\underline{\mathrm{F}}_4 = \left(\gamma \frac{\underline{\mathrm{F}}_3 \cdot \underline{\mathrm{v}}_3}{c}, \gamma \underline{\mathrm{F}}_3\right) \tag{48}$$

A gyorsulás meghatározása

Fejezzük ki magát a gyorsulásvektort az erőtörvényből!

Szorozzuk meg a (34) egyenletet skalárisan a $\underline{\mathrm{v}}$ vektorral:

$$\underline{\mathrm{F}} \cdot \underline{\mathrm{v}} = \frac{\gamma^3 m}{c^2} \cdot \left(\underline{\mathrm{v}} \cdot \underline{\mathrm{a}}\right) \cdot v^2 + \gamma m \cdot \underline{\mathrm{a}} \cdot \underline{\mathrm{v}} = \left(\frac{\gamma^3 m}{c^2} \cdot v^2 + \gamma m\right)\left(\underline{\mathrm{a}} \cdot \underline{\mathrm{v}}\right) \tag{49}$$

Itt kihasználtuk a $\underline{\mathrm{v}} \cdot \underline{\mathrm{v}} = v^2$ összefüggést (lásd a dokumentum végén), illetve a skaláris szorzat kommutativitását, továbbá az összeadásra vonatkozó asszociativitását. Ebből:

$$\underline{\mathrm{a}} \cdot \underline{\mathrm{v}} = \frac{\underline{\mathrm{F}} \cdot \underline{\mathrm{v}}}{\frac{\gamma^3 m}{c^2} \cdot v^2 + \gamma m} = \frac{\underline{\mathrm{F}} \cdot \underline{\mathrm{v}}}{\gamma m \left(\frac{\gamma^2 v^2}{c^2} + 1\right)} \tag{50}$$

A nevezőben szereplő zárójeles tényező tagjait közös nevezőre hozva és összevonva:

$$\frac{\gamma^2 v^2}{c^2} + 1 = \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma^2 \tag{51}$$

adódik. Ezt beírva (50)-be:

$$\underline{\mathrm{a}} \cdot \underline{\mathrm{v}} = \frac{\underline{\mathrm{F}} \cdot \underline{\mathrm{v}}}{\gamma m \left(\frac{\gamma^2 v^2}{c^2} + 1\right)} = \frac{\underline{\mathrm{F}} \cdot \underline{\mathrm{v}}}{\gamma^3 m} \tag{52}$$

Helyettesítsük ezt be (34)-ben az $\underline{\mathrm{a}} \cdot \underline{\mathrm{v}}$ (vagyis a $\underline{\mathrm{v}} \cdot \underline{\mathrm{a}}$) helyére:

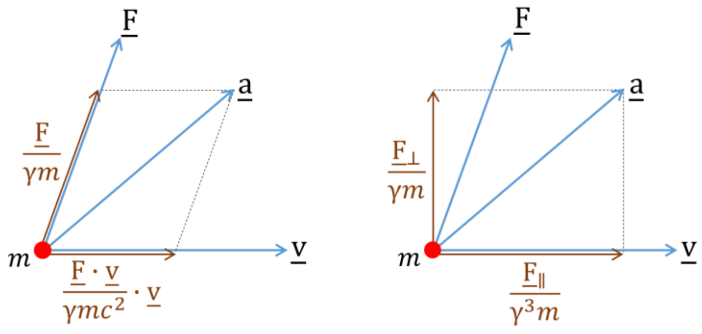
$$\underline{\mathrm{F}} = \frac{\gamma^3 m}{c^2} \cdot \left(\underline{\mathrm{v}} \cdot \underline{\mathrm{a}}\right) \cdot \underline{\mathrm{v}} + \gamma m \cdot \underline{\mathrm{a}} = \frac{\gamma^3 m}{c^2} \cdot \frac{\underline{\mathrm{F}} \cdot \underline{\mathrm{v}}}{\gamma^3 m} \cdot \underline{\mathrm{v}} + \gamma m \cdot \underline{\mathrm{a}} = \frac{\underline{\mathrm{F}} \cdot \underline{\mathrm{v}}}{c^2} \cdot \underline{\mathrm{v}} + \gamma m \cdot \underline{\mathrm{a}} \tag{53}$$

Ebből a gyorsulás már könnyen kifejezhető:

$$\boxed{\underline{a} = \frac{1}{\gamma m}\left(\underline{F} - \frac{\underline{F}\cdot\underline{v}}{c^2}\cdot\underline{v}\right)} \tag{54}$$

Kis sebességek esetén a $\gamma \approx 1$, az $1/c^2$-et tartalmazó tag elhanyagolható, így természetesen visszakapjuk a klasszikus mechanika $\underline{a} = \underline{F}/m$ egyenletét.

Figyeljük meg, hogy relativisztikusan a (hármas)gyorsulás nem a (hármas)erő irányába mutat![3] Rendelkezik ugyanis egy $\underline{F}/\gamma m$ erőirányú, és egy $(\underline{F}\cdot\underline{v})\cdot\underline{v}/\gamma mc^2$ sebességirányú komponenssel.



A hármasgyorsulás komponensei

A relativisztikus tömeg

A szakirodalomban gyakran találkozunk a *relativisztikus tömeg* elnevezéssel, amely definíció szerint:

$$m_{\text{relativisztikus}} = \gamma m = \frac{E_{\text{össz}}}{c^2} \tag{55}$$

A relativisztikus tömeg néha ugyan szemléletessé teszi a magyarázatot, de hibás következtetésekre vezethet, ezért mindenképpen célszerű elkerülni a használatát.

Mutasson például az erő a sebesség irányába. Ekkor az $\underline{F}\cdot\underline{v}$ skaláris szorzat megegyezik az erő és a sebesség nagyságának a szorzatával, az $Fv\cdot\underline{v}$ nagysága pedig $F\cdot v^2$. Így a gyorsulás nagysága (54) alapján:

$$a = \frac{1}{\gamma m}\left(F - \frac{Fv^2}{c^2}\right) = \frac{F}{\gamma m}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{F}{\gamma^3 m} \tag{56}$$

Vagyis:

$$F = \gamma^3 ma \tag{57}$$

Ebben az egyszerű esetben tehát éppen nem a γm relativisztikus (transzverzális) tömeggel, hanem a $\gamma^3 m$ longitudinális tömeggel kell számolni, ami értelmetlenné teszi a relativisztikus tömeg fogalmát. A testek tömege *állandó*, ugyanaz mindenütt, mindig és minden sebesség esetén. A képletekben szereplő γ szorzótényezőt (és ennek hatványait) a sajátidő és a megfigyelő ideje közti eltérésnek kell tulajdonítanunk, nem pedig annak, hogy a tömeg értéke különbözik a két vonatkoztatási rendszerben.[4]

A tehetetlen tömeg a relativitáselméletben

A klasszikus fizikában a tehetetlenség a testeknek azt a tulajdonságát fejezi ki, hogy sebességük megváltoztatásához erőre van szükség. A tehetetlenség mértékének, a tehetetlen tömegnek a definíciója Newton 2. törvényén alapul:

$$\underline{F} \sim \underline{a} \quad \Longrightarrow \quad m_{\text{tehetetlen}} = \frac{F}{a} \tag{58}$$

[3] A négyesgyorsulás már a négyeserő irányába mutat: $\underline{F}_4 = m\underline{a}_4$

[4] Taylor–Wheeler: Téridő-fizika (Gondolat Kiadó, 1974, 179. old.)

Ez az összefüggés csak akkor ad a testre jellemző mennyiséget, ha az erő egyenesen arányos az általa létrehozott gyorsulással.

Mint megmutattuk, a relativitáselméletben nem teljesül az egyenes arányosság. A gyorsulás nemcsak a test (nyugalmi) tömegétől függ, hanem a sebességétől (egyben a vonatkoztatási rendszertől) és az erőnek a sebességgel közbezárt szögétől. Ezért nem lehet a körülményektől függetlenül, egyértelműen definiálni egy test tehetetlen tömegét.

Adott erő és sebesség esetén persze a nagyobb tömegű testnek kisebb lesz a gyorsulása, azonban maga a *tehetetlen tömeg* elveszti jelentőségét és szerepét. A nyugalmi tömeg kapcsolatban van a tehetetlenséggel, de ez a kapcsolat bonyolult (lásd Newton 2. törvényének relativisztikus alakját).

Vektorok skaláris szorzata

Két vektor skaláris szorzata a háromdimenziós térben egyenlő a koordináták szorzatának az összegével:

$$\underline{\mathrm{v}}_3 \cdot \underline{\mathrm{a}}_3 = v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z \tag{59}$$

A négydimenziós téridőben a skaláris szorzatot a Pitagorasz-tételnek megfelelően úgy kapjuk meg, hogy az időbeli koordináták szorzatából *kivonjuk* a térbeli koordináták szorzatának az összegét:

$$\underline{\mathrm{v}}_4 \cdot \underline{\mathrm{a}}_4 = v_t a_t - \left(v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z\right) \tag{60}$$

A zárójelben szereplő összeg éppen a térbeli komponensek háromdimenziós skaláris szorzatával egyezik meg, így a téridőben a négyesvektorok skaláris szorzata felírható

$$\underline{\mathrm{v}}_4 \cdot \underline{\mathrm{a}}_4 = v_t a_t - \underline{\mathrm{v}}_3 \cdot \underline{\mathrm{a}}_3 \tag{61}$$

alakban.

A két vektor mindkét esetben akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk 0. (A téridőben így definiáljuk a merőlegességet.)

Vegyük észre, hogy mind a háromdimenziós euklideszi térben, mind pedig a négydimenziós téridőben a vektorok nagyságának a négyzete a vektorok négyzetével (önmagukkal vett skaláris szorzatukkal) egyenlő:

$$\underline{\mathrm{r}}_3 \cdot \underline{\mathrm{r}}_3 = \underline{\mathrm{r}}_3^2 = r_x \cdot r_x + r_y \cdot r_y + r_z \cdot r_z = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = \left|\underline{\mathrm{r}}_3\right|^2 \tag{62}$$

$$\underline{\mathrm{r}}_4 \cdot \underline{\mathrm{r}}_4 = \underline{\mathrm{r}}_4^2 = r_t \cdot r_t - \left(r_x \cdot r_x + r_y \cdot r_y + r_z \cdot r_z\right) = r_t^2 - \left(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2\right) = \left|\underline{\mathrm{r}}_4\right|^2 \tag{63}$$

ami felírható

$$\underline{\mathrm{r}}_4 \cdot \underline{\mathrm{r}}_4 = \underline{\mathrm{r}}_4^2 = r_t^2 - \underline{\mathrm{r}}_3^2 = \underline{\mathrm{r}}_4^2 = \left|\underline{\mathrm{r}}_4\right|^2 \tag{64}$$

alakban is.

Összeállította: Juhász Tibor

Irodalom

L.B. Okun: The concept of mass (Usp. Fiz. Nauk, 158, 511–530, 1989)

A. Steane: Relativity Made Relatively Easy (Oxford University Press, 2012)