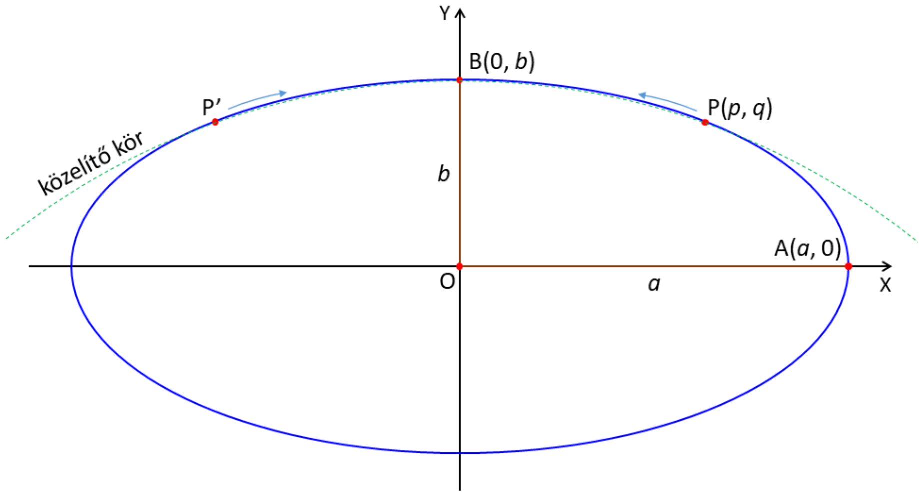
Az ellipszis görbülete a tengelyek végpontjaiban

Határozzuk meg az ellipszis görbületét a tengelyek végpontjaiban! Tekintsük először a kistengely egyik végpontját!

Vegyük fel az ellipszist a koordináta-rendszerben úgy, hogy középpontja egybeessen az origóval, kistengelye pedig az y tengelyen helyezkedjen el. Legyen a fél nagytengely a, a fél kistengely pedig b hosszúságú. Ekkor az ellipszis egyenlete:[1]

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Jelöljük a kistengely „felső” végpontját B-vel. Ennek koordinátái: $(0, b)$.



A B ponthoz tartozó simulókör

A görbület kiszámításához szükségünk van a B ponthoz tartozó simulókörre. A simulókör meghatározásához vegyük fel a B-től jobbra a P, balra pedig a P’ pontot az ellipszisen. Nevezzük a három ponton áthaladó kört egy közelítő körnek. A simulókör a közelítő körök határhelyzete lesz, ha a P és a P’ is egyre jobban közeledik a B-hez. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a P és a P’ az y tengelyre szimmetrikusan helyezkedik el.

A közelítő kör középpontja

Egy közelítő kör $K(x_k, y_k)$ középpontját a PB és a BP’ szakaszok felezőmerőlegeseinek a metszéspontja jelöli ki. A szimmetria miatt a középpont rajta van az y tengelyen ($x_k = 0$), így elegendő csak a PB szakasz felezőmerőlegesének az y-tengellyel való metszéspontját meghatározni (az ábrát lásd a következő oldalon).

A felezőmerőlegeshez az egyenes normálvektoros egyenletét fogjuk felhasználni. Ehhez meg kell adnunk egy pontját és egy normálvektorát (az egyenesre merőleges vektort). A felezőmerőleges áthalad a PB szakasz $F(x_0, y_0)$ felezőpontján, egy normálvektora pedig a $\overrightarrow{BP}$ vektor.

A PB szakasz felezőpontja

Legyen a P pont x koordinátája p, y koordinátája pedig q. Ekkor:

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1$$

[1] Lásd a dokumentum végén lévő kiegészítést.

Ebből:

$$q = b\sqrt{1 - \frac{p^2}{a^2}}$$

A továbbiakban a négyzetgyökös kifejezést w-vel fogjuk jelölni:

$$w = \sqrt{1 - \frac{p^2}{a^2}}$$

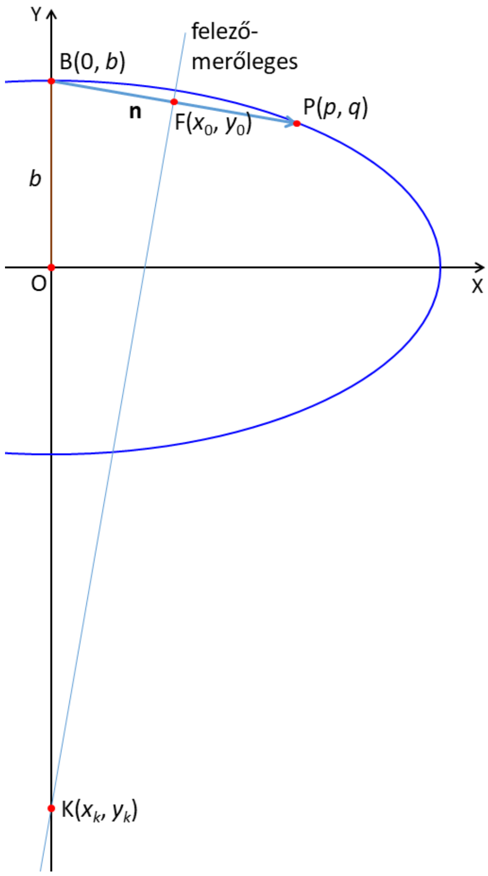
Így:

$$q = b \cdot w$$

A P pont koordinátái tehát: $(p, b \cdot w)$.

A PB szakasz $F(x_0, y_0)$ felezőpontjának a koordinátáit a $P(p, bw)$ és a $B(0, b)$ pontok koordinátáinak a számtani közepe adja meg:

$$x_0 = \frac{p+0}{2} = \frac{p}{2}, \quad y_0 = \frac{bw+b}{2} = \frac{b}{2}(w+1)$$



A szakaszfelező merőleges normálvektora

A szakaszfelező merőleges egy $\mathbf{n}(n_1, n_2)$ normálvektora például a $\overrightarrow{BP}$ vektor, melynek koordinátái megegyeznek a pontok koordinátáinak a különbségével:

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{BP} = (p - 0,\ bw - b) = \big(p,\ b(w-1)\big)$$

A szakaszfelező merőleges egyenlete

Az (x_0, y_0) ponton áthaladó, (n_1, n_2) normálvektorú egyenes egyenlete:[2]

$$n_1 x + n_2 y = n_1 x_0 + n_2 y_0$$

azaz:

$$px + b(w-1)y = p\frac{p}{2} + b(w-1)\frac{b}{2}(w+1)$$

vagyis:

$$px + b(w-1)y = \frac{p^2}{2} + \frac{b^2}{2}(w-1)(w+1)$$

A közelítő kör középpontjának koordinátái

A közelítő kör $K(x_k, y_k)$ középpontját a szakaszfelező merőleges és az y tengely metszéspontja adja meg. Az y tengely pontjainak x koordinátája 0, így:

$$p \cdot 0 + b(w-1)y_k = \frac{p^2}{2} + \frac{b^2}{2}(w-1)(w+1)$$

[2] Lásd például: https://matekarcok.hu/egyenes-normalvektoru-egyenlete/

$b(w-1)$-gyel osztva az egyenlet, kapjuk, hogy:

$$y_k = \frac{p^2}{2b(w-1)} + \frac{b}{2}(w+1)$$

A simulókör középpontja

A közelítő körök középpontja a simulókör $C(0, y_c)$ középpontjához közeledik, ha a P ponttal közeledünk a B ponthoz. Ekkor a P pont első koordinátája, a p egyre jobban közeledik a 0-hoz, a $w = \sqrt{1-\frac{p^2}{a^2}}$ pedig az 1-hez (írjunk a gyökjel alatt a p helyére 0-t). Ezért az y_k kifejezésében a második tag tart a b-hez:

$$\frac{b}{2}(w+1) \rightarrow \frac{b}{2}(1+1) = b$$

Vizsgáljuk meg az első tagot. A w közelítő értéke kicsi p értékekre az $(1+x)^n \approx 1+nx$ alapján[3]

$$w = \sqrt{1-\frac{p^2}{a^2}} = \left(1-\frac{p^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{p^2}{a^2}\right) = 1 - \frac{p^2}{2a^2}$$

Ezt beírva az y_k első tagjába:

$$\frac{p^2}{2b(w-1)} \approx \frac{p^2}{2b\left(1-\frac{p^2}{2a^2}-1\right)} = -\frac{p^2}{2b\,\frac{p^2}{2a^2}} = -\frac{p^2}{2b}\cdot\frac{2a^2}{p^2} = -\frac{a^2}{b}$$

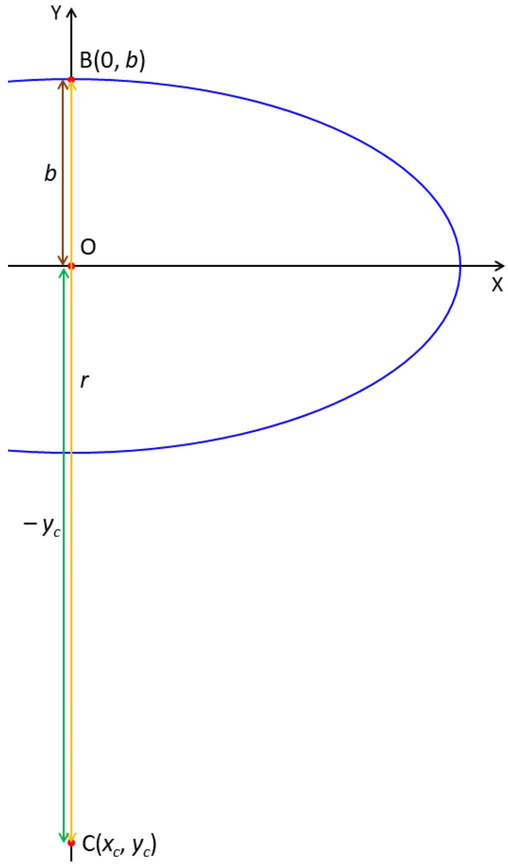
Megállapítottuk tehát, hogy a közelítő körök középpontjának

$$y_k = \frac{p^2}{2b(w-1)} + \frac{b}{2}(w+1)$$

koordinátája egyre jobban közeledik az

$$y_c = -\frac{a^2}{b} + b$$

értékhez, ha p tart a 0-hoz (ezért w tart az 1-hez). Ez az y_c érték adja meg a simulókör középpontjának y koordinátáját.



Az ellipszis görbülete a tengelyek végpontjaiban

A kistengely végpontjához tartozó simulókör sugara az ábra alapján:

$$r = b + (-y_c) = b - y_c = b - \left(-\frac{a^2}{b} + b\right) = \frac{a^2}{b}$$

A görbület tehát:

$$\kappa_b = \frac{1}{r} = \frac{b}{a^2}$$

[3] Lásd a *Matematikai alapok – 1.* videóban (https://youtu.be/4-HC6oKuch4?t=237). Ugye, milyen hasznos ez a közelítő képlet? ☺

A levezetésben nem használtuk ki, hogy a b a fél kistengely hossza. Így a nagytengely végpontjához tartozó görbületre ugyanilyen képlet vonatkozik. A szokásos jelölésekkel:

$$\kappa_a = \frac{a}{b^2}$$

Vegyük észre, hogy egy adott b kis féltengely esetén az a növelésével az ellipszis görbülete a kistengely végpontjaiban egyre csökken, a 0-hoz tart:

$$\kappa_b = \frac{b}{a^2} \to 0, \quad \text{ha} \quad a \to \infty$$

A nagytengely végpontjaiban viszont a görbület tart a ∞-hez:

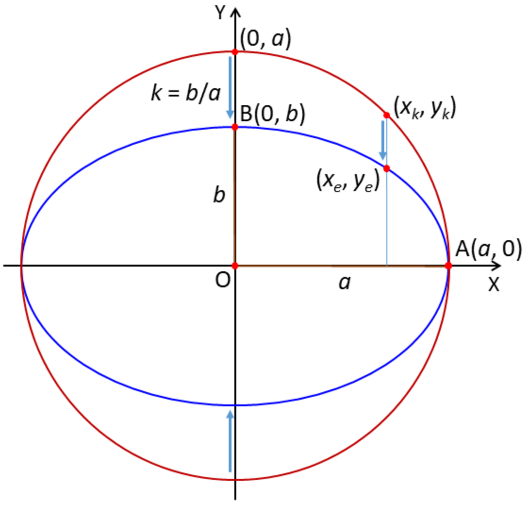
$$\kappa_a = \frac{a}{b^2} \to \infty, \quad \text{ha} \quad a \to \infty$$

Kiegészítés

Az ellipszis egyenlete

Az ellipszist a körből származtatjuk úgy, hogy az y tengellyel párhuzamosan k-ad részére összenyomjuk[4]. Ennek során a fél nagytengely nem változik, mérete az eredeti kör sugarával egyezik meg, amit jelöljünk a-val. A fél kistengelyt b-vel jelölve:

$$k = \frac{b}{a}$$



Feleljen meg a kör (x_k, y_k) pontjának az összenyomás után az ellipszisen az (x_e, y_e) pont. Az x tengelyre merőleges félhúrok hossza szintén a k-ad részükre csökken, így:

$$x_e = x_k, \quad y_e = k y_k$$

vagyis:

$$x_k = x_e, \quad y_k = \frac{y_e}{k} = \frac{a}{b} y_e$$

Az origó középpontú, $r = a$ sugarú kör egyenlete:

$$x_k^2 + y_k^2 = a^2$$

Behelyettesítve a fenti x_k, y_k értékeket:

$$x_e^2 + \frac{a^2}{b^2} y_e^2 = a^2$$

a^2-tel osztva, és elhagyva az ellipszisre utaló indexet, kapjuk az ellipszis szokásos formában felírt egyenletét:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Összeállította: Juhász Tibor

[4] Az ellipszis egyéb definíciói ekvivalensek a fenti meghatározással.