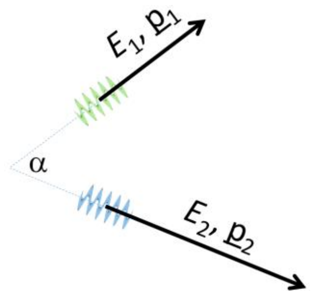
A fotonok nyugalmi tömege

Az alábbiakban a vektorok nagyságát (abszolút értékét) dőlt betűvel, aláhúzás nélkül jelöljük, például: $|\underline{p}| = p$.

A *Relativitáselmélet középszinten* sorozat 13. részében (youtu.be/hugpRs_mwJo) bebizonyítottuk, hogy egy test akkor és csak akkor mozoghat fénysebességgel, ha nyugalmi tömege 0. A foton nyugalmi tömege tehát 0. Energiája azonban $E_{\text{foton}} = hf$, amit éppen Einstein ismert fel.[1]

Bár egyetlen foton nyugalmi tömege csak 0 lehet, de a fotonokból álló rendszerek már rendelkezhetnek nyugalmi tömeggel. Ennek bizonyításához tekintsünk két fotont. Energiájuk legyen E_1 és E_2, hármaslendületük pedig $\underline{p}_1$ és $\underline{p}_2$.



Használjuk fel, hogy az energia, illetve a lendület additív mennyiségek. Azaz, egy rendszer összenergiája/összlendülete egyenlő az elemek energiáinak/lendületeinek az összegével:

$$E_{\text{össz}} = \Sigma\, E_i \qquad \underline{p}_{\text{össz}} = \Sigma\, \underline{p}_i$$

A két fotonra:

$$E_{\text{össz}} = E_1 + E_2 \qquad \underline{p}_{\text{össz}} = \underline{p}_1 + \underline{p}_2$$

A rendszer nyugalmi tömege, összenergiája és lendülete között az alábbi összefüggés áll fenn (lásd az említett videót):

$$(mc^2)^2 = E^2 - (pc)^2$$

Vagy, összehangolt mértékegységeket használva (c = 1, az energiát és a lendületet is kg-ban mérjük):

$$m^2 = E^2 - p^2$$

Mivel egy vektor nagyságának a négyzete megegyezik a saját magával vett skaláris szorzattal, ezért:

$$m^2 = E^2 - \underline{p}^2$$

A két fotonra:

$$m^2 = (E_1 + E_2)^2 - \left(\underline{p}_1 + \underline{p}_2\right)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 - p_1^2 - p_2^2 - 2\underline{p}_1\underline{p}_2$$

A foton nyugalmi tömege 0, így

$$m^2 = E^2 - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E = p$$

Behelyettesítve a két fotonra felírt egyenletbe, kiesik az E^2 és a p^2, marad:

$$m^2 = 2E_1E_2 - 2\underline{p}_1\underline{p}_2$$

Vagy, a skaláris szorzat tulajdonságai alapján:

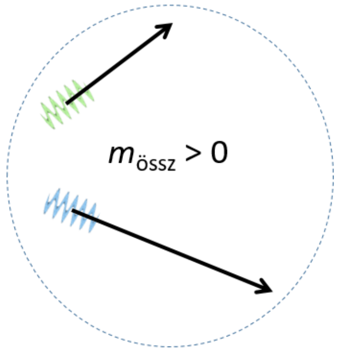
$$m^2 = 2E_1E_2 - 2p_1p_1\cos\alpha$$

ahol az α a két foton lendülete (sebessége) által közbezárt szöget jelöli.

Ismét felhasználva a fotonokra vonatkozó $E = p$ összefüggést:

$$m^2 = 2E_1E_2 - 2E_1E_1\cos\alpha = 2E_1E_2(1 - \cos\alpha)$$

[1] A h a Planck-állandó ($6{,}6\cdot10^{-34}$ Js), az f pedig a foton frekvenciája.

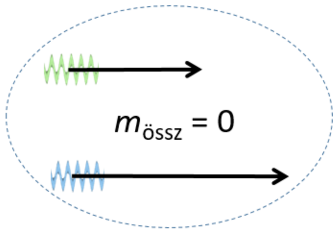


Mivel a fotonok energiája nem lehet 0, ezért a rendszer nyugalmi tömege csak akkor tűnik el (alakul át teljes egészében mozgási energiává), ha $1 - \cos \alpha = 0$, azaz $\alpha = 0$. Vagyis a két foton ugyanabban az irányban mozog.

Minden egyéb esetben a két fotonból álló rendszernek van nyugalmi tömege, bár az összetevők nem rendelkeznek nyugalmi tömeggel. Több foton (fotonfelhő) esetén ugyanilyen következtetésre juthatunk.

Javaslom az olvasónak, a fenti levezetést végezze el úgy is, hogy nem használja az összehangolt mértékegységeket.

Megjegyzések



1) A részecske-antirészecske pár összlendülete a tömegközépponti vonatkoztatási rendszerben 0 (lásd: youtu.be/eiskLDXP6ro). Egyetlen foton lendülete viszont semmilyen vonatkoztatási rendszerben nem lehet 0. Ezért az annihilációnál legalább két foton keletkezik.

2) A foton $p = hf / c$ lendülete függ a vonatkozatási rendszertől, hiszen a frekvencia függ a hullámforrás és a megfigyelő egymáshoz viszonyított sebességétől (lásd: Doppler-effektus). Bizonyítható azonban, hogy a fotonokból álló rendszer nyugalmi tömege már invariáns mennyiség, tehát nem függ a vonatkoztatási rendszertől.[2]

Összeállította: Juhász Tibor

[2] Lásd például: arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0708/0708.4289.pdf